

Gramática Livre de Contexto

Parte 02

Gramática Livre de Contexto

- Ambigüidade

Uma Gramática Livre de Contexto é dita ser *Gramática Ambígua*, se existe uma cadeia que possua duas ou mais derivações ou duas ou mais árvores de derivação.

Tal cadeia terá várias árvores sintáticas diferentes e, portanto, vários significados diferentes

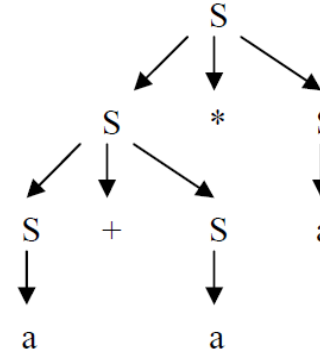
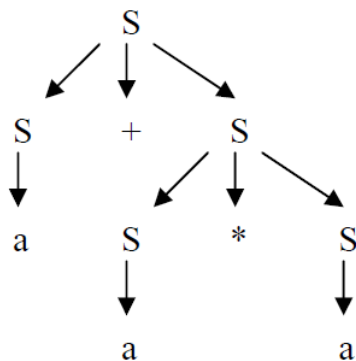
Exemplo:

L_1 é composta de expressões aritméticas contendo parênteses balanceados, um operador e dois operandos, com $G_1 = (\{S\}, \{+, *, (,), a\}, S, P_1)$ tal que $P_1 = \{S \rightarrow S + S \mid S * S \mid (S) \mid a \}$

A cadeia $a+a*a$, pertencente a L_1 pode ter as derivações:

$S \rightarrow S + S \rightarrow a + S \rightarrow a + S * S \rightarrow a + a * S \rightarrow a + a * a$

$S \rightarrow S + S \rightarrow S + S * S \rightarrow S + S * a \rightarrow S + a * a \rightarrow a + a * a$



Então a gramática é ambígua.

Gramática Livre de Contexto

- Ambigüidade

Uma Linguagem é uma **Linguagem Inerentemente Ambígua** se qualquer Gramática Livre de Contexto que a define é ambígua.

Uma Linguagem é uma **Linguagem Não Ambígua** se existir uma Gramática Livre de Contexto, que a define, não ambígua.

A linguagem $L = \{ a^n b^m c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \cup \{ a^n b^m c^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$ é inerentemente ambígua. Vejamos porque:

$$L = L_1 \cup L_2$$

L_1 é gerada pela Gramática $G_1 = (\{S_1, A\}, \{a, b, c\}, S_1, P_1)$, tal que $P_1 = \{S_1 \rightarrow S_1 c \mid A, A \rightarrow aAb \mid \lambda\}$

L_2 é gerada pela Gramática $G_2 = (\{S_2, B\}, \{a, b, c\}, S_2, P_2)$, tal que $P_2 = \{S_2 \rightarrow aS_2 \mid B, B \rightarrow bBc \mid \lambda\}$

L é gerada pela gramática, $G = (\{S_1, A, S_2, B\}, \{a, b, c\}, S, P)$, tal que $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}$

A gramática G é ambígua desde que a cadeia $a^n b^n c^n$ (a única resultante da união das duas linguagens) tem duas derivações distintas (uma a partir de S_1 e outra a partir de S_2).

Gramática Livre de Contexto

Seja $G_1 = (\{S\}, \{a, +\}, S, P_1)$, tal que $P_1 = \{ S \rightarrow a \mid S + S \}$

Então se pode gerar a cadeia $a + a$ da forma:

$S \rightarrow S + S \rightarrow S + a \rightarrow a + a$ (derivação à direita)

$S \rightarrow S + S \rightarrow a + S \rightarrow a + a$ (derivação à esquerda)

Portanto G_1 é ambígua

Seja $G_2 = (\{S\}, \{a, +\}, S, P_2)$, tal que $P_2 = \{ S \rightarrow a \mid a + S \}$

Então se pode gerar a cadeia $a + a$ da forma:

$S \rightarrow a + S \rightarrow a + a \rightarrow a + a$

Portanto G_2 não é ambígua

Seja $G_3 = (\{S\}, \{a, +\}, S, P_3)$, tal que $P_3 = \{ S \rightarrow a \mid a + a \mid S + S \}$

Então se pode gerar a cadeia $a + a$ da forma:

$S \rightarrow a + a$

$S \rightarrow S + S \rightarrow S + a \rightarrow a + a$ (derivação à direita)

$S \rightarrow S + S \rightarrow a + S \rightarrow a + a$ (derivação à esquerda)

Portanto G_3 é ambígua

Entretanto a Linguagem, $L = L(G_1) = L(G_2) = L(G_3)$, não é ambígua, já que existe uma gramática (G_2) que não é ambígua.

Gramática Livre de Contexto

- Considere a gramática $G_4 = (V, T, P, \langle \text{EXPR} \rangle)$

$V = \{\langle \text{EXPR} \rangle, \langle \text{TERM} \rangle, \langle \text{FACTOR} \rangle\}$ e $T = \{a, +, \times, (,)\}$.

$P = \{\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERM} \rangle \mid \langle \text{TERM} \rangle$

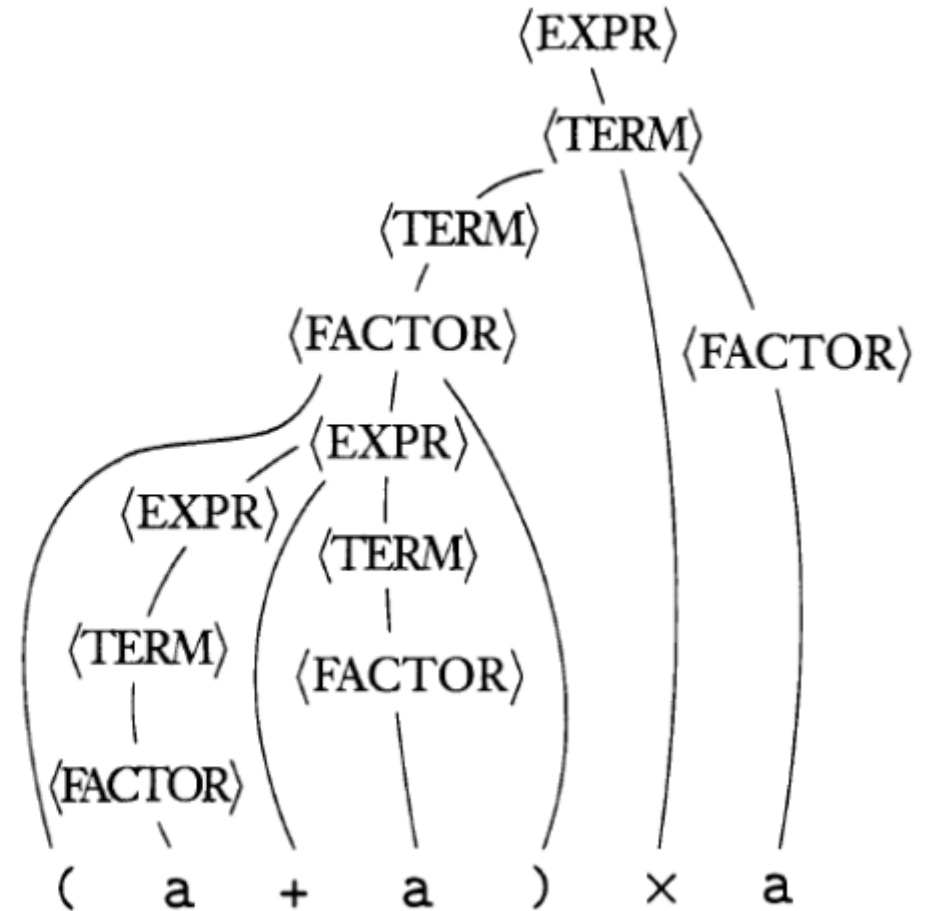
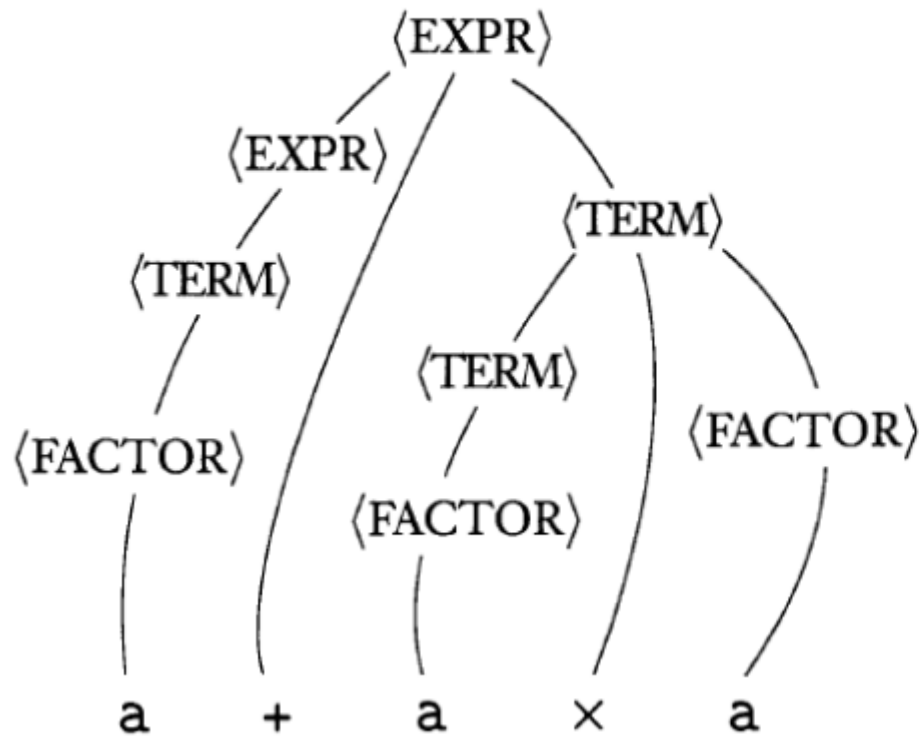
$\langle \text{TERM} \rangle \rightarrow \langle \text{TERM} \rangle \times \langle \text{FACTOR} \rangle \mid \langle \text{FACTOR} \rangle$

$\langle \text{FACTOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid a\}$

As cadeias $a + a \times a$ e $(a + a) \times a$ podem ser geradas com a gramática G_4

Gramática Livre de Contexto

- Árvores Sintáticas



Gramática Livre de Contexto

- Derivação da Gramática G_4

Uma **derivação mais à esquerda** de uma cadeia w é aquela em que, a cada passo, a variável remanescente escolhida para ser substituída é a variável mais à esquerda na forma sentencial intermediária

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &\Rightarrow \langle T \rangle \Rightarrow \langle T \rangle \times \langle F \rangle \Rightarrow \langle F \rangle \times \langle F \rangle \Rightarrow (\langle E \rangle) \times \langle F \rangle \\ &\Rightarrow (\langle E \rangle + \langle T \rangle) \times \langle F \rangle \Rightarrow (\langle T \rangle + \langle T \rangle) \times \langle F \rangle \Rightarrow (\langle F \rangle + \langle T \rangle) \times \langle F \rangle \\ &\Rightarrow (a + \langle T \rangle) \times \langle F \rangle \Rightarrow (a + \langle F \rangle) \times \langle F \rangle \Rightarrow (a + a) \times \langle F \rangle \Rightarrow (a + a) \times a \end{aligned}$$

Gramática Livre de Contexto

- Simplificação de Gramáticas Livres de Contexto

A Gramática Simplificada é uma gramática livre de contexto que não apresenta símbolos desnecessários, produções vazias, nem produções do tipo $A \rightarrow B$

Sequências de Simplificações:

- 1) Retirada de produções vazias da forma $A \rightarrow \lambda$
- 2) Retirada de produções da forma $A \rightarrow B$ que simplesmente substituem uma variável por outra.
- 3) Retirada de variáveis ou símbolos terminais não usados

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Produções Vazias

Considere a Gramática Livre de Contexto $G = (V, T, S, P)$. O algoritmo para retirada das produções vazias é composto por três etapas, como segue:

Etapa1: Definição do conjunto de variáveis que constituem produções vazias (V_λ)

Etapa2: Definição do conjunto de produções sem produções vazias.

Etapa3: Inclusão de geração da palavra vazia, se necessário.

Etapa1: Conjunto de variáveis que constituem produções vazias

No final dessa etapa será construído um conjunto de variáveis que geram λ , ou seja, V_λ .

Rotina para construção de V_λ

$V_\lambda = \{A \mid A \rightarrow \lambda \};$

Repita

$V_\lambda = V_\lambda \cup \{X \mid X \rightarrow X_1 \dots X_n \in P \text{ tal que } X_1, \dots, X_n \in V_\lambda \}$

Até que o cardinal de V_λ não aumente

Lembre-se que cardinal de um conjunto corresponde ao tamanho deste conjunto. Assim, a rotina encerra o comando “Repita ... Até ...” quando o conjunto V_λ não se alterar.

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Produções Vazias

Etapas: Conjunto de produções sem produções vazias.

A gramática resultante dessa etapa é $G_1 = (V, T, S, P_1)$ onde o conjunto de produções P_1 é construído pela rotina abaixo.

Rotina para construção de P_1

$$P_1 = \{A \rightarrow \alpha \mid \alpha \neq \lambda\}$$

Repita

para toda produção $A \rightarrow \alpha \in P$ e $X \in V_\lambda$ tal que $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2$ e $\alpha_1 \alpha_2 \neq \lambda$ faça

$$P_1 = P_1 \cup \{A \rightarrow \alpha_1 \alpha_2\}$$

Até que o cardinal de P_1 não aumente

Etapas: Inclusão de geração da palavra vazia, se necessário.

Se a palavra vazia pertence à linguagem, então a gramática resultante desta etapa é $G_2 = (V, T, S, P_2)$, com $P_2 = P_1 \cup \{S \rightarrow \lambda\}$

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Produções Vazias

Seja $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$ com $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab \mid \lambda\}$

Etapas:

$$V_\lambda = \{Y \mid Y \rightarrow \lambda\} = \{Y\}$$

$$V_\lambda = \{S \mid S \rightarrow \lambda\} = \{S, Y\}$$

$$1^{\text{a}}. \text{ iteração: } V_\lambda = \{Y\} \cup \{X \mid X \rightarrow Y\} = \{S, Y, X\}$$

Portanto $V_\lambda = \{S, X, Y\}$

Etapas:

$$P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\}$$

$$1^{\text{a}}. \text{ iteração - } P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\} \cup \{S \rightarrow aa \mid bb\} = \\ = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\}$$

$$2^{\text{a}}. \text{ iteração - } P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\} \cup \Phi = \\ = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\}$$

Então $G_1 = (V, T, S, P_1)$ onde $P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\}$

Etapas:

$$P_2 = P_1 \cup \{S \rightarrow \lambda\}$$

Então $G_2 = (V, T, S, P_2)$, com $P_2 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab\}$

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Produções da Forma $A \rightarrow B$

Considere a Gramática Livre de Contexto $G = (V, T, S, P)$.

Etapas1: construção do fecho de cada variável

Rotina para construção dos fechos

Para toda variável $A \in V$ faça
fecho- $A = \{B \mid A \neq B \text{ e } A \Rightarrow^+ B \text{ usando exclusivamente produções da forma } X \rightarrow Y\};$

Etapas2: exclusão das produções da forma $A \rightarrow B$.

A gramática resultante dessa etapa é $G_1 = (V, T, P_1, S)$ onde P_1 é construído como na rotina a seguir:

Rotina para geração de P_1

$P_1 = \{ A \rightarrow \alpha \mid \alpha \notin V \};$
Para toda variável $A \in V$ e $B \in \text{fecho-}A$ faça
Se $B \rightarrow \alpha \in P$ e $\alpha \notin V$
Então $P_1 = P_1 \cup \{ A \rightarrow \alpha \};$

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Produções da Forma $A \rightarrow B$

Considere a Gramática Livre de Contexto $G = (V, T, S, P)$.

$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S, P)$, com $P = \{ S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab \}$

Etapal:

Para toda variável $A \in V$, então S, X e Y

fecho- $S = \Phi$

fecho- $X = \{Y\}$

fecho- $Y = \Phi$

Etapal:

$P_1 = \{ S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b, Y \rightarrow ab \}$

1ª. iteração - $S \in \{S, X, Y\}$

fecho- $S = \Phi$ então (FALHA)

2ª. iteração - $X \in \{S, X, Y\}$ e $Y \in \text{fecho-}X = \{Y\}$

Como $Y \rightarrow ab$, então $X \rightarrow ab$

Então $P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b, Y \rightarrow ab\} \cup \{X \rightarrow ab\} =$

$P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab, Y \rightarrow ab\}$

A gramática resultante é $G_1 = (V, T, P_1, S)$ onde $P_1 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab, Y \rightarrow ab\}$

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Símbolos não Usados

Considere a Gramática Livre de Contexto $G = (V, T, S, P)$.

Etapal: garante que qualquer variável gera terminais. Resultado: $G_1 = (V_1, T, S, P_1)$

Ao final dessa etapa é construída a Gramática Livre de Contexto $G_1 = (V_1, T, S, P_1)$ com V_1 construído como na rotina a seguir e P_1 possuirá os mesmos elementos de P excetuando-se as produções cujas variáveis não pertencem a V_1 .

Rotina para geração de V_1 :

$V_1 = \Phi;$
Repita
 $V_1 = V_1 \cup \{ A \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \in (T \cup V_1)^* \}$
Até que o cardinal de V_1 não se altere.

Etapal: garante que qualquer símbolo é atingível a partir do símbolo inicial.

Ao final dessa etapa é construída a Gramática Livre de Contexto $G_2 = (V_2, T_2, S, P_2)$ com V_2 construído e T_2 construídos como a rotina abaixo e o conjunto P_2 possuirá os mesmos elementos de P_1 excetuando-se as produções cujos símbolos não pertencem a V_2 ou T_2 .

Rotina para a geração de V_2 e T_2 :

$T_2 = \Phi;$
 $V_2 = \{ S \};$
Repita
 $V_2 = V_2 \cup \{ A \mid X \rightarrow \alpha A \beta \in P_1, X \in V_2 \};$
 $T_2 = T_2 \cup \{ a \mid X \rightarrow \alpha a \beta \in P_1, X \in V_2 \};$
Até que os cardinais de V_2 e T_2 não aumentem.

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Símbolos não Usados

Considere a Gramática Livre de Contexto $G = (V, T, S, P)$.

$$P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab, Y \rightarrow ab\}$$

Etapal:

A geração de V_1

$$V_1 = \Phi;$$

$$1^a. \text{ interação - } V_1 = \Phi \cup \{ S, X, Y \mid S \rightarrow aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid ab, Y \rightarrow ab \} = \{S, X, Y\}$$

$$\text{Então } V_1 = \{S, X, Y\}$$

Então $P_1 = P$

Etapal2:

A geração de V_2 e T_2

$$T_2 = \Phi;$$

$$V_2 = \{ S \};$$

$$1^a. \text{ interação - } V_2 = \{S\} \cup \{ A \mid B \rightarrow \alpha A \beta \in P_1, B \in \{S\} \} = \\ = \{S\} \cup \{ X \mid S \rightarrow a X a \} = \{S, X\}$$

$$T_2 = \Phi \cup \{ a \mid B \rightarrow \alpha a \beta \in P_1, B \in \{S, X\} \} = \\ = \{ a \mid X \rightarrow a \} = \{a\}$$

$$2^a. \text{ interação - } V_2 = \{S, X\} \cup \{ A \mid B \rightarrow \alpha A \beta \in P_1, B \in \{S, X\} \} = \\ = \{S, X\} \cup \Phi = \{S, X\}$$

$$T_2 = \{a\} \cup \{ a \mid B \rightarrow \alpha a \beta \in P_1, B \in \{S, X\} \} = \\ = \{a\} \cup \{ b \mid X \rightarrow b \} = \{a, b\}$$

$$\text{Então } V_2 = \{S, X\} \text{ e } T_2 = \{a, b\}$$

Gramática Livre de Contexto

- Retirada de Símbolos não Usados

Então $P_2 = P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab\}$, já que $Y \notin V_2$

Assim, $G_2 = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, P_2)$, com $P_2 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab\}$

Portanto, a partir de:

$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$ com $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow ab \mid \lambda\}$

Obteve-se:

$G_2 = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, P_2)$, com $P_2 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid ab\}$

Próximos Assuntos

- Formas Normais
- Autômatos com Pilha